КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЧУМАРИНА ОЛЬГА ВЛАДИМИРОВНА

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕМБРАНЫ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ И ЖИДКОСТЬЮ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ - 2001

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Казанского государственного университета.

Научные руководители: Доктор физико-математических наук, профессор **Ю.П. Артюхин**

Доктор физико-математических наук, профессор **А.П. Грибов**

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук, профессор **Н.Г. Гурьянов**

Доктор физико-математических наук, профессор **Р.А. Каюмов**

Ведущая организация: Казанский государственный технологический университет

Защита состоится "28" февр 2002 г. в 14 ч. 30 мин. в ауд. Физ.2 на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 по защите диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по механике при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г.Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке КГУ им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан "28" января 2002 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
Кандидат физ.-мат. наук. доцент А.А.Саченков

07264201

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ.

Работа посвящена решению краевых задач с неизвестной границей. Такие нелинейные задачи встречаются в различных областях механики и относятся к категории труднорешаемых задач. Это задачи упруго-пластического кручения стержня произвольного сечения, задачи гидромеханики по отысканию течения со свободными границами и контактные задачи теории упругости, теории пластин и оболочек.

Задачи со свободными границами могут быть сформулированы в виде эллиптических вариационных неравенств с односторонним ограничением внутри области. Литература по такому подходу обширна и приводится в обзорах работ Кравчука А.С., Даутова Р.З.[1] Метод вариационных неравенств приводит к задаче нелинейного программирования, в которой приходится перебирать многочисленные варианты трудоемких решений. Используя какой-либо сеточный метод, получается последовательность приближений, сходящаяся к точному решению неравенства. После решения неравенства находятся приближенное множество примыкания решения к препятствию и свободная граница. Метод локальных вариаций (МЛВ), предложенный Черноусько Ф.Л., позволяет уменьшить объем вычислений, но имеет слабую сходимость, а также трудно применим к сложным областям. Перспективным методом решения таких задач является метод граничных элементов (МГЭ)[2].

Проблемами упруго-пластического кручения стержня занимались такие ученые как Л. Прандтль, А. Надаи, Е. Треффц, Л.А. Галин, Б.Д. Анин, А.Ю. Ишлинский и др. Поиск границы между упругой и пластической зоной сводится к решению нелинейного интегрального уравнения. Существует решение этой задачи методом функций комплексного переменного для полигонального контура при предположении развитых областей пластичности и малого закругления

---

[1] Кравчук А.С. Вариационный метод исследования контактного взаимодействия и его реализация на ЭВМ. В сб. «Расчет на прочность» 25. -М.: Машиностроение. 1984. 33-50с.

Даутов Р.З. Задача с препятствием внутри области. Приближенное определение свободной границы.// Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.2. - Казань: УНИПРЕСС, 1999. 121-170с.

[2] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. –М.: Мир. 1989. 510с.

угловых точек[3]. Решение такой задачи аналогично решению контактной задачи для мембраны.

Вопрос о решении контактных задач для тонкостенных элементов произвольной формы считается неразработанным. Для пластин и оболочек произвольной формы не удается получить в аналитическом виде функцию Грина, определяющую ядра интегральных уравнений, на основе которых построен интегральный подход решения контактных задач. С развитием МГЭ появилась возможность создания численно-аналитической функции Грина на основе фундаментального решения изгиба тонкостенных элементов. В связи с этим, актуальной является задача разработки эффективного алгоритма на основе МГЭ решения контактных задач с неизвестной областью взаимодействия для тонкостенных элементов сложного очертания.

ЦЕЛЬ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ.

-развить МГЭ к исследованию изгиба многосвязных мембран со сложным контуром;

-разработать алгоритм на основе МГЭ решения двумерных контактных задач для мембран произвольной формы с неизвестной областью контакта. Решить ряд тестовых и прикладных задач различного взаимодействия мембран с жестким телом. Сравнить применение МГЭ и МЛВ к поиску областей контакта;

-построить методики решения задач изгиба мембран произвольного очертания с учетом эффекта взаимодействия между тонкостенным элементом и весомой несжимаемой жидкостью, задач контакта мембран сложных форм с подвижным телом при неизвестной границе контакта под действием гидростатической нагрузки. Создать программное обеспечение, позволяющее решать задачи указанного класса;

-разработать алгоритм применения МГЭ к задаче изгиба мембран сложной формы в геометрически нелинейной постановке.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА РЕЗУЛЬТАТОВ.

Получил развитие МГЭ применительно к контактным задачам для тонкостенных элементов. Создан алгоритм поиска двумерной области контакта для тонкостенных элементов произвольной формы. С его помощью решены задачи контакта мембран с твердым телом. Разработаны итерационные процессы непрямого метода граничных

---

[3] Галин Л.А. Упруго – пластические задачи. М.: Наука, 1984. - 232с.

элементов (НМГЭ) для решения задач контакта мембраны сложного очертания с жестким телом при действии гидростатической нагрузки. Предложены способы построения приближенного решения НМГЭ для задач нелинейного изгиба мембран сложной формы.

ДОСТОВЕРНОСТЬ полученных результатов обеспечивается:

Строгими математическими постановками рассматриваемых задач и обоснованным применением математических методов; применением аналитических методов и высокоточных квадратурных формул вычисления интегралов; совпадением ряда тестовых задач численных результатов с аналитическими, опубликованных в литературе или полученных в диссертации, а также с решениями методом ЛВ; сходимостью приближенных решений, полученных НМГЭ, при увеличении числа элементов на контуре; тщательностью отладки и тестирования программ для ПЭВМ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ

Заключается в развитии численных методов решения контактных задач для тонкостенных элементов произвольной формы. Созданный алгоритм поиска области контакта для мембран может использоваться при проектировании различных приборов систем автоматического управления, конструкций вытеснителя в трубопроводах низкого давления, разделителей топливных баков в ракетостроении, манометрических приборов, при решении задач упруго-пластического кручения стержня некруглого сечения с учетом мембранных аналогий.

Имеется большое разнообразие воздухоопорных и пневматических строительных конструкций, при анализе которых необходимы оценки, подобные полученным при решении задач взаимодействия мембраны с жестким телом и жидкостью.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ:

Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались

1. На итоговых научных конференциях Казанского университета с 1999-2001 г.
2. На Международной конференции "Актуальные проблемы механики оболочек" – Казань – 1998.
3. На школе-конференции молодых ученых в области механики оболочек и пластин – Казань – 1998.

4. На XVI военно-технической конференции КФВ Артиллерийского Университета - Казань. – 1999.
5. На XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин – Н. Новгород – 1999.
6. На Международной научно-технической конференции "Технико-экономические проблемы промышленного производства" – Наб. Челны – 2000.
7. На Международной конференции "Актуальные проблемы механики оболочек" – Казань – 2000.
8. На Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики" – Казань- 2000.
9. На городских научно-методических семинарах по теоретической механике – Казань - 1998, 2000.
10. На семинарах в КГУ.

ПУБЛИКАЦИИ. По теме диссертации опубликовано 10 научных работ.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации – 149 страниц, включая 59 рисунков, 8 таблиц и список литературы 268 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

В работе основное внимание уделяется построению алгоритма на основе НМГЭ решения контактных задач с неизвестной границей взаимодействия мембраны произвольной формы с жесткими телами и жидкостью.

Во введении приводится обзор работ, близких к теме диссертации, сформулированы актуальность, цель работы, ее структура, выписаны положения, выносимые на защиту.

В первой главе выписаны основные соотношения нелинейной теории мембран, из которых в предположениях, что усилия предварительного натяжения T_0 значительно больше усилий от изгиба, по всем кромкам постоянны, и сдвигающее усилие равно нулю, следует известное уравнение изгиба мембраны при действии распределенной нагрузки интенсивностью q(x):

$$\nabla^2 w = -\frac{q(x)}{T_0}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) описывает как малые, так и большие прогибы w мембраны по сравнению с толщиной. Считается, что деформации и углы поворота мембраны при изгибе являются малыми.

Далее разбирается применение НМГЭ к решению задач свободного изгиба мембраны. Рассматриваются аналитические и численные способы интегрирования, вычисление интегралов с особенностями для постоянных и линейных элементов.

Исследуется изгиб предварительно натянутых многосвязных мембран под действием равномерно распределенной нагрузки. Алгоритм создается для произвольных форм и количества контуров Γ_i мембраны. Изгиб описывается уравнением (1) с граничным условием $w(x)\big|_{x\in\Gamma_i}=0$.

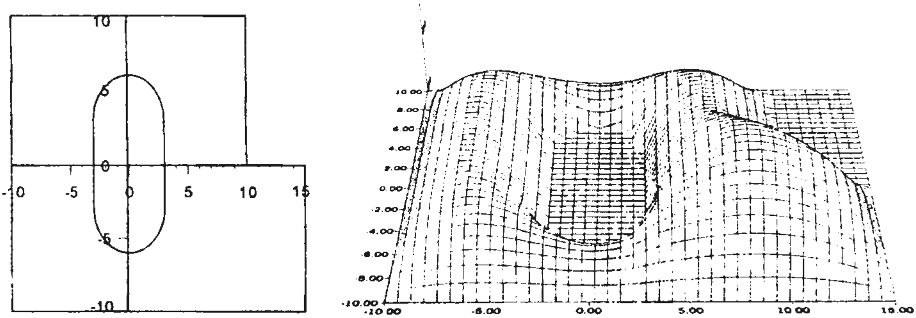
Согласно НМГЭ решение ищется в виде:

$$w(x)=\frac{1}{T_0}\sum_{i=0}^{n}\int_{\Gamma_i}G(x,\zeta)\mu(\zeta)d\Gamma(\zeta)+w^r(x). \qquad (2)$$

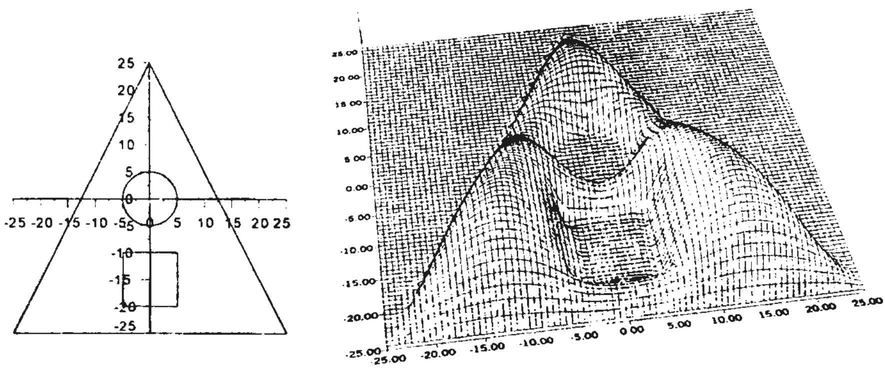
Здесь $x(x_1,x_2)$ - точка области мембраны, $\zeta(\zeta_1,\zeta_2)$ - точка контура Γ_i; $w^r(x)$ - частное решение; $G(x,\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\ln r(x,\zeta)$ - фундаментальное решение в точке x от единичного воздействия в точке ζ; $r(x,\zeta)=|x-\zeta|$; $\mu(\zeta)$ - неизвестные компенсирующие нагрузки, нормальные к поверхности мембраны.

Удовлетворяя выражение (2) граничным условиям, получается система интегральных уравнений. При реализации численного подхода границы Γ_i разбиваются на ряд элементов. Для отдельных узловых точек записывается дискретная форма уравнений. Вычисляются интегралы по каждому элементу. Ядра интегральных уравнений содержат особенность типа $\ln r$ при $r\to 0$. Интегральные уравнения сводятся к системе линейных алгебраических уравнений $Ax=b$, где A- матрица системы; b- вектор правых частей, зависящий от выбора частного решения; $x(\mu_1,..\mu_n)$- искомый вектор компенсирующих нагрузок на границе; n- общее количество узлов по всем контурам. Система решается методом Гаусса. Затем определяются значения функции w в области из соотношения (2) и углы поворота на контурах.

Приводятся сравнения приближенных результатов с построенными в работе методом собственных функций аналитическими решениями для полукруглой и кольцевой форм. Наблюдается хорошее совпадение результатов. Некоторые примеры полученных решений в виде изогнутых поверхностей мембран приводятся на рис. 1 в), 2 в). Максимальные углы поворота не превышают пятнадцати градусов. Геометрия соответствующих мембран указана на рис.1 а), 2 а).



а) Рис.1 в)



а) в)

Рис.2

Глава 2 посвящена решению задач контакта мембраны сложной формы с жесткими телами.

Рассматривается однородная, натянутая по произвольному контуру Г мембрана, изгибаемая давлением q(x) (мембрана занимает область Ω в плоскости (x_1,x_2), изгиб происходит в направлении оси ox_3 декартовой системы координат $ox_1x_2x_3$). Прогиб мембраны ограничен препятствием, уравнение поверхности которого имеет вид $x_3=f(x)$ (рис.3). Постановка задачи об определении прогиба w(x) и границы взаимодействия Γ_1 содержит уравнение равновесия (1); краевое условие $w(x)=0, \quad x(x_1,x_2)\in\Gamma$; контактное условие $w(x)=f(x), \quad x(x_1,x_2)\in S$.

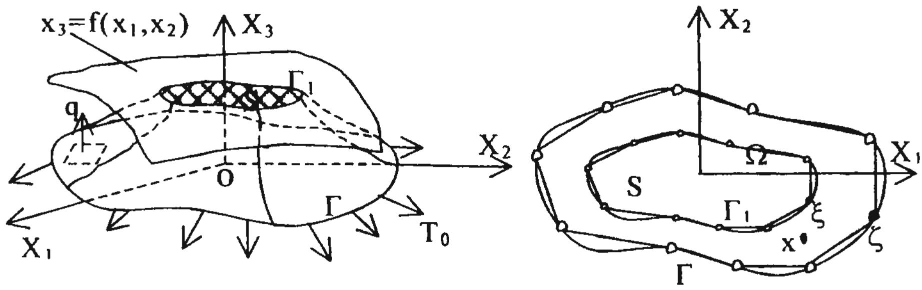


Рис.3

При решении контактных задач с неизвестной границей взаимодействия способ непрямой формулировки метода граничных элементов (НМГЭ) состоит в представлении неизвестной функции прогиба в виде потенциалов, обусловленных непрерывно распределенными на границе Г функцией плотности источников μ, а в области контакта S функцией плотности источников σ. Удовлетворяя такое представление функции w на Г граничным и на Γ_1 контактным условиям, получаются разрешающие интегральные уравнения, где неизвестными являются функции плотности источников и координаты точек контура Γ_1 области контакта. Разбивая границы Г и Γ_1 на линейные или постоянные элементы, область S на ячейки, представляя интегральные уравнения в дискретной форме и отыскивая интегралы по каждому элементу аналитически или с помощью одной из схем численного интегрирования, интегральные уравнения удается свести к незамкнутой системе нелинейных трансцендентных уравнений. Количество неизвестных сокращается, когда декартовы координаты узловых точек контура Γ_1 выражаются через полярные (фиксированные углы φ_k, неизвестные расстояния ρ_k) относительно выбранного центра. Полученная замкнутая система относительно неизвестных μ_k, ρ_k решается обычным итерационным методом или методом Ньютона. В процессе вычисления граница контакта, заданная первоначально круглой, приобретает истинную форму. Решение находится, если выбранный центр попадает в область контакта. Чтобы определить предполагаемый участок контакта, исследуется изгиб мембраны без ограничений. Значения функции w во внутренних точках вычисляются путем интегрирования, используя найденные значения компенсирующих нагрузок μ на Г и координат узловых точек на Γ_1 (контактные напряжения σ определяются в рассматриваемых задачах аналитически и являются постоянными). Определяются углы поворота.

Реализуется алгоритм определения границы контакта в следующих задачах.

1. Прогиб мембраны при действии равномерно распределенной нагрузки ограничен жесткой плоскостью, находящейся на расстоянии α от плоскости контура мембраны и наклоненной под углом β. $f(x) = \alpha - \mathrm{tg}\beta x_1$. Неизвестная функция прогиба представляется следующим образом:

$$w(x) = w'(x) - \frac{1}{T_0}\iint_S G(x,\xi)\sigma(\xi)dS(\xi) + \frac{1}{T_0}\int_\Gamma G(x,\zeta)\mu(\zeta)d\Gamma(\zeta) \qquad (3)$$

Здесь учитывается, что $\sigma(\xi) = q$.

В одном из рассматриваемых примеров исследуется взаимодействие с горизонтальной плоскостью мембраны, показанной на рис.4 а), для исходных данных: q=0.483 кг/см^2, T_0=62.8кг/см, $\alpha = 0{,}09$см. Центр первоначально круглой области контакта выбирается в начале координат. Полученная область контакта приводится на рис.4 а). По результатам прогиба во внутренних точках на рис.4 в) построено объемное изображение изгиба мембраны.

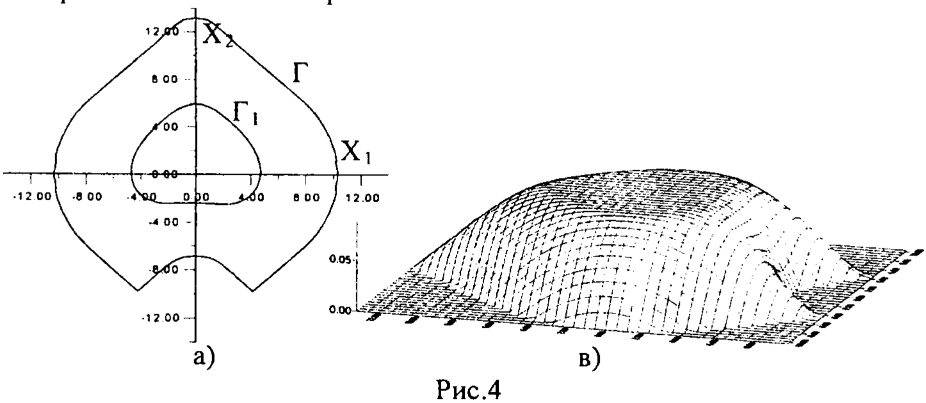


Рис.4

Для круглой мембраны и горизонтальной плоскости строится аналитическое решение с помощью фундаментального решения для кольцевой нагрузки. Приближенное решение при различных способах аппроксимации и интегрирования хорошо согласуется с точным решением.

2. Круглая мембрана вдавливается поступательно движущимся жестким штампом параболического профиля с силой P, приложенным в

произвольной точке (x_{1a},x_{2a}). Требуется дополнительно определить максимальное смещение штампа α (рис.5).

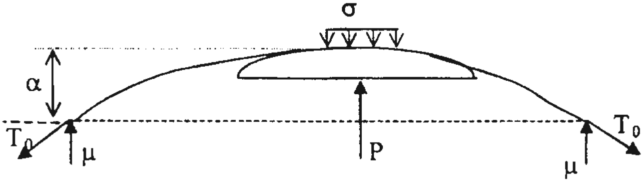


Рис.5

Профиль штампа задается функцией $f(x)=\alpha-\frac{\rho^2(x)}{2R}$ ($\frac{1}{R}$ - кривизна штампа, $\rho^2(x)=(x_1-x_{1a})^2+(x_2-x_{2a})^2$). Функция прогиба ищется в виде:

$$w(x)=\frac{1}{T_0}\iint_S G(x,\xi)\sigma(\xi)ds(\xi)+\frac{1}{T_0}\int_\Gamma G(x,\zeta)\mu(\zeta)d\Gamma(\zeta). \tag{4}$$

Здесь $\sigma(\xi)=\frac{2T_0}{R}$. Для замкнутости системы учитывается условие равновесия штампа $\iint_S \sigma(\xi)dS(\xi)=P$. Центр первоначально круглой области контакта выбирается в точке мембраны, совпадающей с центром параболоида. В отличие от предыдущей задачи, итерационный метод решения полученной системы нелинейных трансцендентных уравнений расходится, поэтому используется метод Ньютона.

На рис.6 отображены значения прогибов в сечении $x_2=0$ при приложении штампа в точке с координатами (2;0) для мембраны радиуса 10 см, P=151.74 кг, T_0=62.8кг/см, R=65.01см. Максимальное смещение штампа равно 0.43213 см. Наибольший полярный радиус от оси приложения штампа до границы контакта равен 5.911см, а наименьший - 4.35869см.

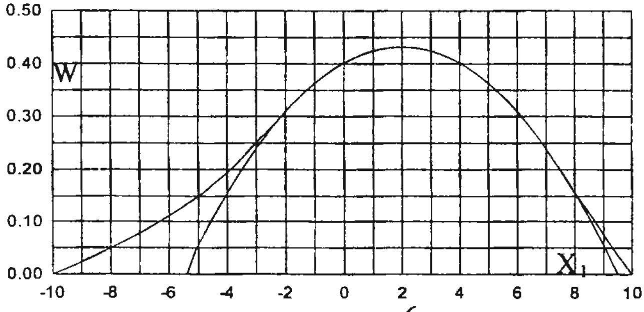


рис.6

По результатам прогиба во внутренних точках строится трехмерное изображение изгиба мембраны, показанное на рис.7.

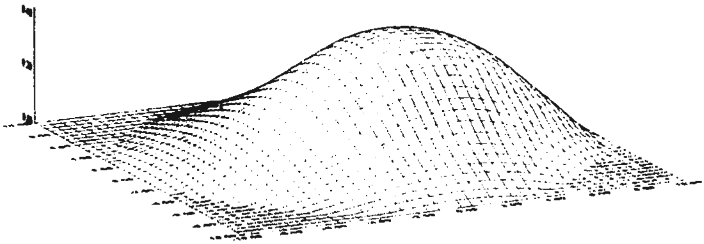


рис.7

Полученные результаты сопоставляются с аналитическим решением, найденным для случая приложения штампа в центре круглой мембраны. Сравнение показало высокую точность расчетов.

3. Прогиб квадратной мембраны (со стороной а) при действии равномерно распределенной нагрузки ограничен правильной четырехугольной пирамидой (с высотой Н), проходящей через закрепленный контур мембраны. В отличие от предыдущих задач взаимодействие происходит по четырем областям контакта S_1, S_2, S_3, S_4.
$f(x)=\begin{cases} H(1-|2x_1-a|/a), & |x_1-a/2|\ge|x_2-a/2| \\ H(1-|2x_2-a|/a), & |x_2-a/2|\ge|x_1-a/2| \end{cases}$. Центр декартовой системы координат выбирается в левом нижнем углу.

Решение представляется следующим образом (учтено, что $\sigma = q$):

$$w(x)=w^r(x)-(q\sum_{i=1}^{4}\iint_{S_i}G(x,\xi_i)dS_i(\xi_i) - \int_{\Gamma}G(x,\zeta)\mu(\zeta)d\Gamma(\zeta))/T_0. \qquad (5)$$

Выражение (5) удовлетворяется контактному условию на каждой границе взаимодействия. Алгоритм не зависит от симметрии и может быть применен для других форм мембраны.

Для подтверждения правильности построенного с помощью НМГЭ алгоритма решение контактной задачи получено также методом локальных вариаций. Функционал полной энергии имеет вид $J=\iint_{\Omega}\phi(w,w_{x_1},w_{x_2})dx_1dx_2$, где $\phi=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right]-qw$. Минимум J при вариации w дает действительный прогиб мембраны. Вариации подвергается значение функции поочередно в каждой дискретной точке, которая приводит к изменению функционала в ее окрестности.

Результаты применения МЛВ показаны сплошной линией на рис.8 для следующих исходных данных: число разбиения четверти мембраны N=24, a=1см, q=0.4кг/см^2, H=0.025см, погрешность итерационного процесса eps= 10^{-9}, вариация прогиба h=0.00002. (С учетом симметрии решение построено для одной границы контакта.) Отмеченные точки имеют координаты A(0.31;0.5), B(0.02;0.125).

Решение задачи НМГЭ отображено на рис.8 пунктирной линией для тех же размеров мембраны, значений нагрузок, высоты пирамиды. Границы Γ_1 и Г разбиваются на 192 элемента, eps=0.00005. Показанные на рис.8 точки имеют координаты A(0.305;0.5), B(0.012;0.13). С увеличением числа разбиения и точности при применении НМГЭ точка B стремится на границу Г. Улучшить результаты, полученные МЛВ, таким же образом трудно из-за немонотонной сходимости.

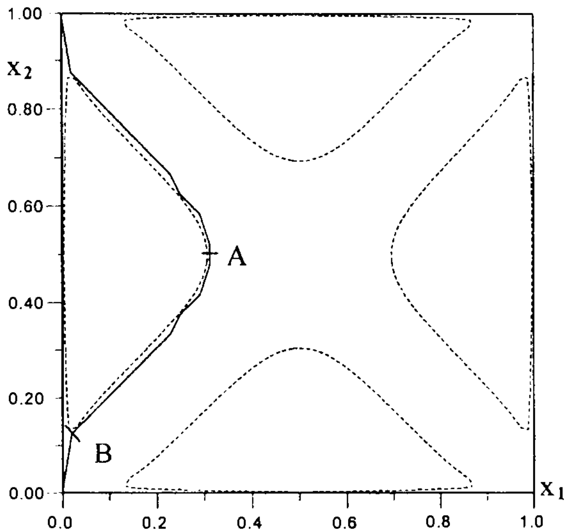


Рис.8

При решении задач упруго-пластического кручения стержня с учетом мембранной аналогии найденные четыре области контакта определяют пластические зоны квадратного сечения. Результаты для рассматриваемой задачи, полученные НМГЭ, так же хорошо согласуются с теоретическими[3] и экспериментальными решениями задачи упруго-пластического кручения стержня.

В третьей главе исследуется изгиб и контакт мембраны сложной формы с плоским подвижным поршнем, когда давление на мембрану создается жидкостью и, в отличие от предыдущих задач, заранее неизвестно.

Исполнительный мембранный элемент имеет следующую модель. В жесткий цилиндрический сосуд с дном в виде натянутой мембраны произвольного очертания налита жидкость объемом $Q_0 = SH_0$, где S - площадь мембраны, H_0 - глубина жидкости в отсутствии отклонения от горизонтали. Деформация дна ограничена поршнем, упирающимся в упругую пружину (рис.9.а). Задача заключается в определении поступательного перемещения (D-d) поршня в зависимости от уровня жидкости в сосуде, где $D = \dfrac{kd + \gamma H S_{kont}}{k - S_{kont}\gamma}$, k – жесткость пружины, d – начальное расстояние поршня от дна мембраны (в отсутствии жидкости), D – конечное расстояние, S_{kont} – площадь неизвестной области контакта, γ - удельный вес жидкости, H – неизвестная высота уровня жидкости от края деформированной мембраны. Весом самой мембраны пренебрегается. Предполагается, что постоянное предварительное натяжение является достаточно большим по сравнению с мембранным усилием от изгиба, можно воспользоваться дифференциальным уравнением (1). Гидростатическое давление на мембрану в точке $x(x_1,x_2)$ равно:

$$q(x) = \gamma[H + w(x)]. \qquad (6)$$

Давление на мембрану и ее отклонение от горизонтального положения принимаются положительными в направлении вниз. Уравнение равновесия принимает вид

$$\Delta w + \alpha^2 w = -\alpha^2 H, \qquad (7)$$

где $\alpha^2 = \dfrac{\gamma}{T_0}$. Граничные и контактные условия: $w|_{\Gamma} = 0$, $w|_{S_{kont}} = D$.

Высота H определяется из условия несжимаемости жидкости:

$$H = H_0 - \frac{1}{S}\int_S w\,dS. \qquad (8)$$

При деформировании мембраны, закрывающей цилиндрический сосуд (рис.9.в), давление поддерживается разностью H уровней жидкости в сообщающихся сосудах. В этом случае (положительное направление w-вверх)

$$q = \gamma[H - w(x)], \quad D = \frac{kd + \gamma H S_{kont}}{k + S_{kont}\gamma}, \qquad (9)$$

$$\Delta w-\alpha^2 w=-\alpha^2 H. \tag{10}$$

Если за H_0 принять высоту добавляемой в трубку жидкости объемом Q_0 в состоянии $w=0$ и одинаковых уровнях жидкости в резервуаре и в трубке, то (S_0 – площадь поперечного сечения трубки)

$$H_0=\frac{Q_0}{S_0}, \quad H=H_0-\frac{1}{S_0}\iint_S w\,dS. \tag{11}$$

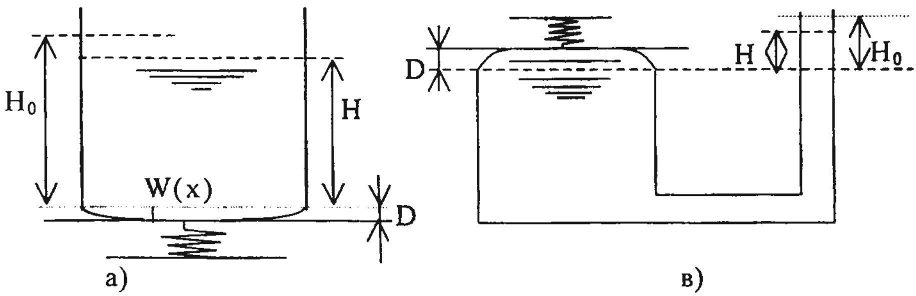


Рис. 9

Решение дифференциальных уравнений (7), (10) согласно НМГЭ ищется в виде:

$$w(x)=\frac{1}{T_0}\int_\Gamma G(x,\zeta)\mu(\zeta)d\Gamma(\zeta)+H\alpha^2 w'(x)-\frac{1}{T_0}\iint_{S_{kont}} G(x,\xi)\sigma(\xi)dS(\xi). \tag{12}$$

В этом выражении для задачи с мембраной в виде дна сосуда $w'(x)=\frac{1}{\alpha^2}(J_0(\alpha r_1)-1)$; $G(x,\zeta)=-\frac{Y_0(\alpha r)}{4}$. $\sigma=q|_{Skont}=\gamma(H+D)$. Для случая ограничения жидкости мембраной сверху $w'(x)=\frac{1}{\alpha^2}(I_0(\alpha r_1)+1)$, $G(x,\zeta)=\frac{K_0(\alpha r)}{2\pi}$; $\sigma=q|_{Skont}=\gamma(H-D)$. $r_1=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, J_0, Y_0, I_0, K_0- функции Бесселя.

В отличие от предыдущих контактных задач алгоритм содержит два итерационных процесса. При заданных приближениях для высоты H, полярных радиусов до узловых точек границы Γ_1 относительно выбранного центра во внутреннем итерационном процессе вычисляется D и решается система нелинейных трансцендентных уравнений, полученная из удовлетворения (12) граничным и контактным условиям. Во внешнем процессе с найденными значениями компенсирующих нагрузок, полярных радиусов границы Γ_1 определяются прогибы из соотношения (12) и новое приближение для Н, которое сравнивается с предыдущим.

Алгоритм применяется к мембранам различных форм. Для круглой мембраны строится точное решение, определяемое из нелинейных трансцендентных уравнений, которое хорошо согласуется с решением НМГЭ. Результаты применения построенного алгоритма к изгибу мембран без ограничений проверяются с известными опубликованными аналитическими решениями для круглой мембраны.

В главе 4 описывается алгоритм применения НМГЭ к решению нелинейных задач изгиба мембраны произвольной формы под действием равномерно распределенной нагрузки.

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях (u,v,w) применяется процесс последовательных приближений:

$$
\begin{aligned}
u^{(k+1)} &= u^{(k)} + \alpha_u(u - u^{(k)}),\\
v^{(k+1)} &= v^{(k)} + \alpha_v(v - v^{(k)}),\\
w^{(k+1)} &= w^{(k)} + \alpha_w(w - w^{(k)}),
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

где α_u, α_v, α_w ($0<\alpha_u\leq 1$, $0<\alpha_v\leq 1$, $0<\alpha_w\leq 1$) – параметры, обеспечивающие сходимость итерационного процесса, k=0,1,2,... Вектор U(u,v,w) определяется из решения системы линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&K(u_{,xx} + \mu_1 u_{,yy} + \mu_2 v_{,xy}) = l_1(w^{(k)}),\\
&K(v_{,yy} + \mu_1 v_{,xx} + \mu_2 u_{,xy}) = l_2(w^{(k)}),\\
&T_0\Delta w = -l_3(u^{(k)},v^{(k)},w^{(k)})w^{(k)}_{,xx}K - l_4(u^{(k)},v^{(k)},w^{(k)})w^{(k)}_{,yy}K -\\
&l_5(u^{(k)},v^{(k)},w^{(k)})w^{(k)}_{,xy}K - q
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

с граничными условиями u=0, v=0, w=0. Используются следующие обозначения: μ - коэффициент Пуассона материала; K- жесткость на растяжение; $\mu_1=(1-\mu)/2$, $\mu_2=(1+\mu)/2$; l_i-нелинейные дифференциальные операторы (i=1,2,..5).

Условие окончания итерационного процесса (13) принимается в виде: $\| U - U^{(k)} \| / \| U^{(k)} \| \leq \varepsilon$, где $\| U \|^2 = \Sigma(u^2(t_i) + v^2(t_i) + w^2(t_i))$, $U^{(k)} = (u^{(k)},v^{(k)},w^{(k)})$, ε-малая положительная величина. Решение системы (14) ищется в виде:

$$u(t) = \int_\Gamma [G_{11}(t,\zeta)\varphi_1(\zeta) + G_{12}(t,\zeta)\varphi_2(\zeta)]ds(\zeta) + u'(t);$$

$$v(t) = \int_{\Gamma} [G_{21}(t,\zeta)\varphi_1(\zeta) + G_{22}(t,\zeta)\varphi_2(\zeta)] ds(\zeta) + v^r(t); \tag{15}$$

$$w(t) = \frac{K}{T_0} \int_{\Gamma} G(t,\zeta) p(\zeta) ds(\zeta) + w^r(t);$$

здесь $t(x,y) \in \Omega$; $\zeta(\xi,\eta) \in \Gamma$, ds-элемент длины контура Г, ограничивающего область мембраны Ω; $G_{ij} = C_1(C_2\delta_{ij} \ln r - y_i y_j)$, (i,j=1,2) – матрица фундаментальных решений Кельвина для плоского напряженного состояния пластины; $C_1=-(1+\mu)^2/(4\pi Eh)$; $C_2=(3-\mu)/(1+\mu)$; $y_1=(x-\xi)/r$; $y_2=(y-\eta)/r$; δ_{ij}- символ Кронекера; $r=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2}$; $G(t,\zeta)$ -фундаментальное решение задачи изгиба мембраны; $\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta), p(\zeta)$ - компоненты вектора компенсирующих нагрузок на контуре Г ($\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$ -усилия, направленные вдоль координатных осей x,y; $p(\zeta)$ - усилие нормальное поверхности).

Функции $u^r(t)$, $v^r(t)$,$w^r(t)$ определяются соотношениями

$$u^r(t) = \int_{\Omega} [G_{11}(t,\zeta) l_1(w^{(K)}(\zeta)) + G_{12}(t,\zeta) l_2(w^{(K)}(\zeta))] d\Omega(\zeta)$$

$$v^r(t) = \int_{\Omega} [G_{21}(t,\zeta) l_1(w^{(K)}(\zeta)) + G_{22}(t,\zeta) l_2(w^{(K)}(\zeta))] d\Omega(\zeta) \tag{16}$$

$$w^r(t) = \frac{K}{T_0} \int_{\Omega} [G(t,\zeta)[-l_3(u^{(K)}, v^{(K)}, w^{(K)}) w,_{xx}^{(K)}(\zeta) -$$

$$l_4(u^{(K)}, v^{(K)}, w^{(K)}) w,_{yy}^{(K)}(\zeta) - l_5(u^{(K)}, v^{(K)}, w^{(K)}) w,_{xy}^{(K)}(\zeta) - \frac{q}{K}] d\Omega(\zeta).$$

При подстановке (15) в граничные условия получается разрешающая система сингулярных интегральных уравнений с неизвестными компенсирующими нагрузками. Ядра интегральных соотношений содержат особенности типа $\ln r$, $1/r$, $1/r^2$ при $r \to 0$. Перемещения в области Ω и на контуре Г определяются соотношениями вида (15).

Разбирается вычисление сингулярных интегралов. Применяется алгоритм к решению нелинейной задачи изгиба длинной прямоугольной мембраны. При решении этой задачи с учетом взаимодействия мембраны с плоскостью создается алгоритм на основе НМГЭ поиска границы контакта, содержащий два итерационных процесса. Для подтверждения результатов строится точное решение.

Созданные в работе алгоритмы реализованы в виде программ на языке Fortran и в среде программирования Delphi.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении приводятся основные результаты, полученные в диссертации.

1. На основе НМГЭ разработана методика исследования изгиба многосвязных мембран со сложным контуром под действием распределенной нагрузки. При различных способах интегрирования и разбиения границ продемонстрирована высокая точность результатов в сравнении с построенным точным решением для осесимметричных случаев.
2. Разработан и реализован алгоритм на основе НМГЭ решения двумерных контактных задач для мембран произвольной формы с неизвестной областью контакта. При рассмотрении различных случаев взаимодействия мембран с жестким телом показана высокая эффективность метода. Сравнение применения МЛВ и разработанного алгоритма на основе НМГЭ к поиску областей контакта подтвердило удобство использования к сложным областям и хорошую сходимость последнего.
3. Предложены итерационные процессы НМГЭ для решения задач изгиба мембран произвольного очертания с учетом эффекта взаимодействия между тонкостенным элементом и весомой несжимаемой жидкостью. Решены задачи контакта мембран сложных форм с подвижным телом с неизвестной границей контакта при действии гидростатической нагрузки. Создано программное обеспечение, позволяющее решать задачи указанного класса.
4. Разработан алгоритм применения НМГЭ к задачам нелинейного изгиба мембран сложной формы, находящихся под действием распределенной нагрузки. Получено решение нелинейной задачи изгиба удлиненной мембраны с учетом контакта с неизвестной областью взаимодействия.
5. Показана эффективность использования численно-аналитической функции Грина при решении контактных задач для тонкостенных элементов со сложным контуром.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.

1. Артюхин Ю.П., Чумарина О.В. Контактная задача мембраны произвольного очертания с жесткой плоскостью // Актуальные проблемы механики оболочек: труды Международной конференции, посвященной памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. А.В. Саченкова. Казань. - 1998 - С. 14 – 18.

2. Артюхин Ю.П., Чумарина О.В. Контактные задачи мембраны произвольного очертания с жестким телом.// Математика. Экономика. Экология. Образование: Тезисы докладов VII Международной конференции. Ростов-на-Дону. – 1999 - С. 124 – 125.
3. Артюхин Ю.П., Чумарина О.В. Поиск неизвестной границы контакта в некоторых двумерных задачах взаимодействия мембран произвольной формы с жесткими телами.// Сб. тез. докладов и сообщений XVI военно-технической конференции. КФВ Артиллерийского Университета. Казань. – 1999 - С. 70-71.
4. Артюхин Ю.П., Чумарина О.В. Контактные задачи для мембраны, сопротивляющейся сдвигу, при взаимодействии с жестким телом.// Механика оболочек и пластин: Сборник докладов XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин. Нижний Новгород. – 1999 - С.29-32.
5. Артюхин Ю.П., Чумарина О.В. Несимметричная задача контакта мембраны с жестким телом.// Технико–экономические проблемы промышленного производства: Тезисы докладов Международной научно-технической конференции. Набережные Челны. – 2000 – С.41.
6. Артюхин Ю.П., Чумарина О.В. Поиск границы контакта мембраны, сопротивляющейся сдвигу, при взаимодействии с жестким штампом.// Актуальные проблемы механики оболочек: Тезисы Международной конференции, посвященной 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина. Казань. – 2000 –С.16-18.
7. Артюхин Ю.П., Грибов А.П., Чумарина О.В. Поиск границы контакта мембраны, сопротивляющейся сдвигу, при взаимодействии с жестким телом.// Актуальные проблемы механики оболочек: Труды Международной конференции, посвященной 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина. Казань. - 2000 – С.98-103.
8. Грибов А.П., Чумарина О.В. Исследование изгиба многосвязных мембран.// Тезисы докладов XIII Всероссийской межвузовской научно-технической конференции. Внутрикамерные процессы в энергетических

2-00

установках, акустика, диагностика, экология. Ч.1, Казань – 2001 – с.271-273.

9. Артюхин Ю.П., Чумарина О.В. Применение метода граничных элементов и метода локальных вариаций к решению задачи контакта квадратной мембраны с четырехугольной пирамидой.// Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Том 5. Актуальные проблемы математики и механики: материалы Международной научной конференции. Казань. – 2000 – С.249-250.
10. Артюхин Ю.П., Чумарина О.В. Контактная задача взаимодействия мембраны с жидкостью и штампом. // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды одиннадцатой межвузовской конференции. Ч.1. Самара. 2001.с.11-14.

Чум

Подписано в печать 25.12. 2001г. Формат 60x90 1/16 Усл. печ. л. 1,25

Тираж 100 Заказ 97

Отпечатано на ризографе в ЗАО "ЛЕОН"
Адрес: 420124, г. Казань, ул. Проточная, 8